



TITLE:

# 液体ジェットの安定性に及ぼす周囲流体および固体壁の影響 (波の非線形現象の数理とその応用)

AUTHOR(S):

吉永, 隆夫

---

CITATION:

吉永, 隆夫. 液体ジェットの安定性に及ぼす周囲流体および固体壁の影響 (波の非線形現象の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 2005, 1430: 48-57

ISSUE DATE:

2005-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/47353>

RIGHT:

## 液体ジェットの安定性に及ぼす周囲流体および固体壁の影響

阪大 基礎工

吉永隆夫 (Yoshinaga Takao)

### 1 はじめに

液体ジェットはその形状により平面ジェットと円柱ジェットに大きく分けることができるが、何れの場合もジェットの安定性には界面での表面張力が重要な役割を果たしている。平面ジェットの場合、表面張力は常に安定化の方向に働くため対称、反対称どちらの攪乱モードに対してもジェットは安定である。しかし外部流が存在すると、いわゆる Kelvin-Helmholtz 不安定により長波攪乱に対して両モードは不安定化される。一方、円柱ジェットの場合、表面張力は軸方向には安定化、半径方向には不安定化するように働くため、攪乱の波長が円柱周囲長さに比べて長い場合外部流がなくてもジェットは不安定化される。

このようなジェットの安定性に関して、線形理論の範囲内ではあるが時空間安定性が詳しく調べられており [1], 外部流体に対するジェット主流の相対速度と表面張力波速度の比を表す Weber 数 ( $= \rho U^2 h / \sigma$ , ここで,  $\rho, U, h, \sigma$  をそれぞれ液体密度, 相対速度, ジェット厚みや径, 表面張力係数) の値により現象は異なる。平面ジェットの場合、液体粘性を考慮しなければ  $We < 1$  で反対称モードは上下流にわたって不安定化する‘絶対不安定’となるのに対し、その他の場合両モードとも攪乱が下流に流されながら不安定化する‘対流不安定’となる。このとき、液体粘性は通常は両攪乱モードを減衰させるが、 $We$  が小さければ反対称モードは時間増幅することなどが知られている。一方、円柱ジェットに対しては、外部流がない場合軸対称モードは  $We < \pi$  で絶対不安定,  $We > \pi$  で対流不安定となる。そして、外部流はそれらの不安定領域の拡大や非軸対称モードの成長などを引き起こし、さらに液体粘性は臨界  $We$  を低下させることなどが知られている。

この不安定性により攪乱が増幅し最終的にジェットが崩壊するほど大きく変形したり、また初期の大変形攪乱に対するジェットの振る舞いなどに関しては上で述べた線形理論では十分説明することはできない。この場合、非線形性を考慮した解析を行う必要があり、これまで通常の摂動展開を高次まで拡張した‘高次近似’ [2, 3] による方法や準一次元的な液膜内の運動を仮定した‘長波近似’による方法などが有効であることが知られている [8, 4, 5, 6, 7]。特に、外部流のある場合、平面ジェットに対して高次近似の手法により 3 次の非線形まで考慮した解析が最近行われている [3]。しかし、線形不安定な系における形式的な高次近似がどの程度有効であるか今のところは明らかではない。一方、外部流がない場合、長波近似により円柱 [8], 平面 [4, 6], 円筒 [5, 7] の各形状のジェットに関して大変形を記述する比較的簡単な非線形方程式がこれまで得られており、ジェットやシート崩壊に及ぼす非線形性の影響が明らかになりつつある。しかし、大変形するジェットのより一般的な挙動を理解するために、外部流の影響を考慮した非線形解析を行う必要がある。

本稿では上で述べたような外部流体を伴う平面ジェットや円柱ジェットの非線形の振る舞いを長波近似を用いて解析的に調べるための手法について述べる。ここでは、特にジェット外部の流体は無限に広がっておらず、ジェット界面から有限の距離に固体壁がある場合を考える。このとき、ジェット本体と固体壁を伴う外部流体の両方に長波近似を用いることにより、ジェットの非線形の振る舞いを記述する方程式の導出を行う。尚、このよ

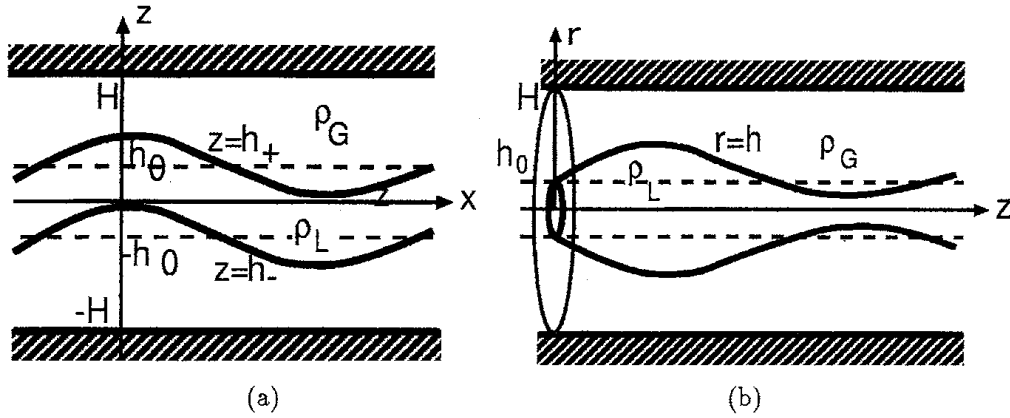


図 1: Schematic diagrams of the liquid jets with surrounding fluids bounded by solid walls; (a) planar jet, (b) cylindrical jet.

うな問題に関連して、外部流を考慮していないが 2 層の液膜からなる円筒ジェットの解析が同様な長波近似を用いておこなわれ [9], 各層に関連する連立した非線形方程式により現象が記述できることが示されていることを注意しておく。

以下では、まず外部壁の影響が従来の外部流を含むジェットの攪乱増幅率にどのような影響を及ぼすかを線形解析により調べる。次に、外部流領域が薄いとしてジェット及び外部流に厚み展開の手法による長波近似を適用し、ジェットの振る舞いを記述する非線形方程式を導出する。さらに、得られた方程式の近似の有効性を確かめるために、増幅率に関して線形理論との比較をおこなっている。最後に得られた結果をまとめて結論とし、また今後の課題について言及する。

## 2 定式化

図 1 に示すような固体壁で挟まれた (囲まれた) 外部流を伴う平面ジェット ((a) 図) と円柱ジェット ((b) 図) の問題を定式化する。ただし、ジェット及び外部流体は非粘性非圧縮を仮定している。

### 2.1 平面ジェット

図 1(a) に示すように、ジェット厚み方向に  $z$  軸、ジェット主流方向に  $x$  軸とり、平衡状態でのジェット界面を  $x = \pm h_0$ 、変形するジェット上下界面をそれぞれ  $z = h_{\pm}$ 、固体壁面を  $z = \pm H$  とする。  $(x, y, z)$  系でジェットおよび外部流の速度ベクトルをそれぞれ  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ ,  $\mathbf{u}_{\pm} = (u_{\pm}, v_{\pm}, w_{\pm})$ , 圧力を  $p, p_{\pm}$ , 密度を  $\rho_L, \rho_G$  とし、界面の表面張力係数を  $\sigma$  とする。このとき、ジェットを記述する方程式は  $h_- < z < h_+$  に対して

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\rho_L (\partial \mathbf{u} / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p, \quad (2)$$

周囲流体部 ( $h_+ < z < H$ ,  $h_- > z > -H$ ) に対して

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_\pm = 0, \quad (3)$$

$$\rho_G(\partial \mathbf{u}_\pm / \partial t + \mathbf{u}_\pm \cdot \nabla \mathbf{u}_\pm) = -\nabla p_\pm, \quad (4)$$

となる。ここで,  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ .

一方, 境界条件は運動学的条件より

$$\begin{aligned} \partial h_\pm / \partial t &= -u_\pm \partial h_\pm / \partial x - v_\pm \partial h_\pm / \partial y + w_\pm \\ &= -u \partial h_\pm / \partial x - v \partial h_\pm / \partial y + w \quad \text{on } z = h_\pm, \end{aligned} \quad (5)$$

$$w_\pm = 0 \quad \text{on } z = \pm H, \quad (6)$$

応力連続の式より

$$p - p_\pm = \pm \sigma \kappa_\pm \quad \text{on } z = h_\pm, \quad (7)$$

を得る。ここで, 界面の法線ベクトルは  $\mathbf{n}_\pm = (-\partial h_\pm / \partial x, \partial h_\pm / \partial y, 1) / \sqrt{1 + (\partial h_\pm / \partial x)^2 + (\partial h_\pm / \partial y)^2}$  で与えられ, 曲率が  $\kappa_\pm = \nabla \cdot \mathbf{n}_\pm$  で表されることを用いて

$$\begin{aligned} k_\pm &= \left[ -(\partial^2 h_\pm / \partial x^2)[1 + (\partial h_\pm / \partial y)^2] - (\partial^2 h_\pm / \partial y^2)[1 + (\partial h_\pm / \partial x)^2] \right. \\ &\quad \left. + 2(\partial h_\pm / \partial x)(\partial h_\pm / \partial y)(\partial^2 h_\pm / \partial x \partial y) \right] \cdot \left[ 1 + (\partial h_\pm / \partial x)^2 + (\partial h_\pm / \partial y)^2 \right]^{-3/2}, \end{aligned} \quad (8)$$

で与えられる。

## 2.2 円柱ジェット

図 1(b) に示すようにジェット半径方向に  $r$  軸, 主流方向に  $z$  軸をとり平衡状態でのジェット半径を  $h_0$ , 変形するジェット界面を  $r = h$  で表し固体壁が  $r = H$  にあるものとする。( $r, \theta, z$ ) 系で, ジェットおよび外部流の速度ベクトルをそれぞれ  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ ,  $\mathbf{u}_G = (u_G, v_G, w_G)$ , 圧力を  $p, p_G$ , 密度を  $\rho_L, \rho_G$  とし, ジェット界面の表面張力係数を  $\sigma$  とする。このとき, ジェットを記述する方程式は  $0 < r < h$  に対して

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (9)$$

$$\rho_L(\partial \mathbf{u} / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p, \quad (10)$$

周囲流体部 ( $h < r < H$ ) に対して

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_G = 0, \quad (11)$$

$$\rho_G(\partial \mathbf{u}_G / \partial t + \mathbf{u}_G \cdot \nabla \mathbf{u}_G) = -\nabla p_G, \quad (12)$$

となる。ここで,  $\nabla = (\partial/\partial r, r^{-1}\partial/\partial \theta, \partial/\partial z)$ .

一方, 境界条件としては運動学的条件より

$$\begin{aligned} \partial h / \partial t &= -(v_G/r)(\partial h / \partial \theta) - w_G(\partial h / \partial z) + u_G \\ &= -(v/r)(\partial h / \partial \theta) - w(\partial h / \partial z) + u, \quad \text{on } r = h, \end{aligned} \quad (13)$$

$$u_G = 0 \quad \text{on } r = H, \quad (14)$$

また、応力連続の式より

$$p - p_G = \sigma \kappa \quad \text{on} \quad r = h, \quad (15)$$

を得る。ここで、界面の法線ベクトルは  $\mathbf{n} = (1, -r^{-1}\partial h/\partial\theta, -\partial h/\partial z)/\sqrt{1 + (\partial h/\partial z)^2 + r^{-2}(\partial h/\partial\theta)^2}$  で与えられ、曲率が  $\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n}$  となることを用いて

$$\begin{aligned} \kappa = & \left[ h^{-1}[1 + (\partial h/\partial z)^2] + 2h^{-3}(\partial h/\partial\theta)^2 - h^{-2}(\partial^2 h/\partial\theta^2)[1 + (\partial h/\partial z)^2] \right. \\ & \left. - (\partial^2 h/\partial z^2)[h^{-2}(\partial h/\partial\theta)^2 + 1] + (\partial h/\partial z)(\partial h/\partial\theta)(\partial^2 h/\partial z\partial\theta)(1 + h^{-2}) \right] \\ & \cdot [1 + (\partial h/\partial z)^2 + h^{-2}(\partial h/\partial\theta)^2]^{-3/2}, \end{aligned} \quad (16)$$

を得る。

### 3 線形安定性

前節で得られた方程式系において、平衡状態に正弦的な微小攪乱を仮定して線形安定性を調べる。

#### 3.1 平面ジェット

平衡状態  $\mathbf{u} = (U, 0, 0)$ ,  $u_{\pm} = 0$ ,  $h_{\pm} = \pm h_0$ ,  $p = p_{\pm} = p_0$  に微小攪乱  $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{u}_{\pm}, \tilde{p}, \tilde{p}_{\pm}, \tilde{\eta}_{\pm}$  が以下のように与えられる:

$$\mathbf{u} = (U, 0, 0) + \tilde{\mathbf{u}}, \quad u_{\pm} = \tilde{u}_{\pm}, \quad p = p_0 + \tilde{p}, \quad p_{\pm} = p_0 + \tilde{p}_{\pm}, \quad h_{\pm} = \pm h_0 + \tilde{\eta}_{\pm}. \quad (17)$$

ここで、以下のような正弦的な攪乱を考える:

$$(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{u}_{\pm}, \tilde{p}, \tilde{p}_{\pm}, \tilde{\eta}_{\pm}) = (\tilde{\mathbf{u}}(z), \tilde{u}_{\pm}(z), \tilde{p}(z), \tilde{p}_{\pm}(z), \tilde{\eta}_{\pm}) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]. \quad (18)$$

ただし、 $(x, y)$  面上での位置ベクトル  $\mathbf{r} = (x, y)$  及び波数ベクトル  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$  とする。(17), (18) を (1) から (7) に用いて微小量の 2 乗以上の項を無視すると、以下のような線形分散関係が反対称 (sinuous), 対称 (bulge) モードに対して得られる:

$$(\omega^*/k^* - \cos\theta)^2 \tanh k^* + \gamma(\omega^*/k^*)^2 Q = k^*/We \quad (\text{sinuous mode}), \quad (19)$$

$$(\omega^*/k^* - \cos\theta)^2 \coth k^* + \gamma(\omega^*/k^*)^2 Q = k^*/We \quad (\text{bulge mode}), \quad (20)$$

ここで、 $k = |\mathbf{k}|$  とすると  $\cos\theta = k_x/k$  は波の伝播方向と主流のなす角が  $\theta$  であることを示している。また、無次元波数、角周波数が  $k^* = h_0 k$ ,  $\omega^* = h_0 \omega/U$  で与えられ、無次元パラメータとして厚み比  $\delta = H/h_0 (> 1)$ , 密度比  $\gamma = \rho_G/\rho_L$  及び Weber 数  $We = \rho_L U^2 h_0/\sigma$  が導入されている。また、

$$Q = \coth(\delta - 1)k^*, \quad (21)$$

は固体壁による影響を示し ( $\delta > 1$ ), 壁が界面に近づく ( $\delta \rightarrow 1$ ) につれて  $Q$  が大きくなり、界面から離れる ( $\delta \gg 1$ ) と  $Q \rightarrow 1$  になる。同様な効果は壁の位置が同じでも長波攪乱 (小さな  $k^*$ ) に対して  $Q$  は大きくなるため、壁の影響は増大する。このことは、長波攪乱ほど壁の存在に敏感であるともいえる。また、この  $Q$  の増加は

密度比  $\gamma$  の見掛けの増加と見ることもできる。一方、主流の影響は  $\cos \theta$  の値で決まるので、攪乱の伝播方向が主流と平行の場合 ( $\theta = 0$ ) に最も強く現れる。

(18) において複素角周波数  $\omega^*$  の虚数部  $\omega_I^*$  は攪乱の時間増幅率を示し、実波数  $k^*$  に対する増幅率  $\omega_I^*$  の関係を図 2(a) に  $\theta = 0$  の場合について示す。同じ  $\delta$  の値に対しては  $We$  の値が大きくなるにつれて外部流に対する速度が増大するので、Kelvin-Helmholtz 不安定により増幅する波数の領域や最大増幅率が増える。一方、 $We$  の値に関わらず  $\delta$  が小さいほど固体壁の影響を大きく受け、増幅する波数領域や最大増幅率は同様に増加することがわかる。

### 3.2 円柱ジェット

平面ジェットの場合と同様、以下のように平衡状態に微小攪乱が加わった状態を考える：

$$u = (0, 0, U) + \tilde{u}, \quad u_G = \tilde{u}_G, \quad p = p_0 + \sigma/h_0 + \tilde{p}, \quad p_G = p_0 + \tilde{p}_G, \quad h = h_0 + \tilde{h}. \quad (22)$$

ここで攪乱は次のように与えられる：

$$(\tilde{u}, \tilde{u}_G, \tilde{p}, \tilde{p}_G, \tilde{h}) = (\tilde{u}(r), \tilde{u}_G(r), \tilde{p}(r), \tilde{p}_G(r), \tilde{h}) \exp[i(kz + m\theta - \omega t)], \quad (23)$$

(22) 及び (23) を (9) から (14) に用いて微小量の 2 乗以上の項を無視して、以下の線形分散関係を得る：

$$[(A_1 - \gamma A_2) - A_1 A_3(1 - \gamma)]\omega^{*2} - 2A_1(1 - A_3)k^*\omega^* + A_1(1 - A_3)k^{*2} + (1 - A_3)k^*(1 - m^2 - k^{*2})/We = 0, \quad (24)$$

ここで、

$$A_1 = I_m(k^*)/I'_m(k^*), \quad A_2 = K_m(k^*)/K'_m(k^*), \quad A_3 = \frac{K'_m(\delta k^*)I'_m(k^*)}{I'_m(\delta k^*)K'_m(\delta k^*)}.$$

$I_m, K_m$  はそれぞれ第 1 種、第 2 種の  $m$  次変形ベッセル関数であり、' は引数による微分を示す。また、無次元波数、角周波数が  $k^* = kh_0, \omega^* = \omega h_0/U$  で与えられ、無次元パラメータとして  $\delta = H/h_0, \gamma = \rho_G/\rho_L, We = \rho_L U^2 h_0/\sigma$  が用いられている。ジェット界面から壁が十分離れた ( $\delta \gg 1$ ) 場合  $A_3 \rightarrow 0$  となり、十分接近 ( $\delta \rightarrow 1$ ) している場合  $A_3 \rightarrow 1$  となることを注意しておく。図 2(b) に  $k^*$  に対する増幅率  $\omega_I^*$  の関係を示す。 $We$  が小さい場合外部流よりも主に表面張力により不安定化されるため、不安定モードは  $0 < k^* < 1$  の範囲で軸対称モード ( $m = 0$ ) のみである (Rayleigh mode)。また、外部流の影響が小さいので  $\delta$  の値による増幅率の変化はほとんどなく固体壁の影響は小さい。しかし、 $We$  が大きくなると外部流の影響が大きくなり不安定な波数領域が増大し、さらに軸対称モードのみならず非軸対称モード ( $m > 1$ ) も不安定になる (Taylor mode)。また固体壁の影響も大きく現れ、壁が近づくにつれて増幅波数領域及び最大増幅率は増加していく。

## 4 長波近似による非線形方程式の導出

ジェットの厚みや半径に比べて界面変形の波長が十分長い場合、長波近似の手法が非線形問題を取り扱う上で有効である。この近似では、ジェット内部での速度や圧力などの諸量はジェット中心面や中心線まわりの展開により与えられる。ここでは、このような手法をジェットの本体部および固体壁を含む周囲流体部の両方に用いることにより、周囲流体及び固体壁の影響を含むジェット振る舞いを記述する非線形方程式が得られることを示す。

以下では、簡単のために平面ジェットに対しては 2 次元 ( $x, z$ ) 系で、円柱ジェットに対しては軸対称 ( $r, z$ ) 系で考える。

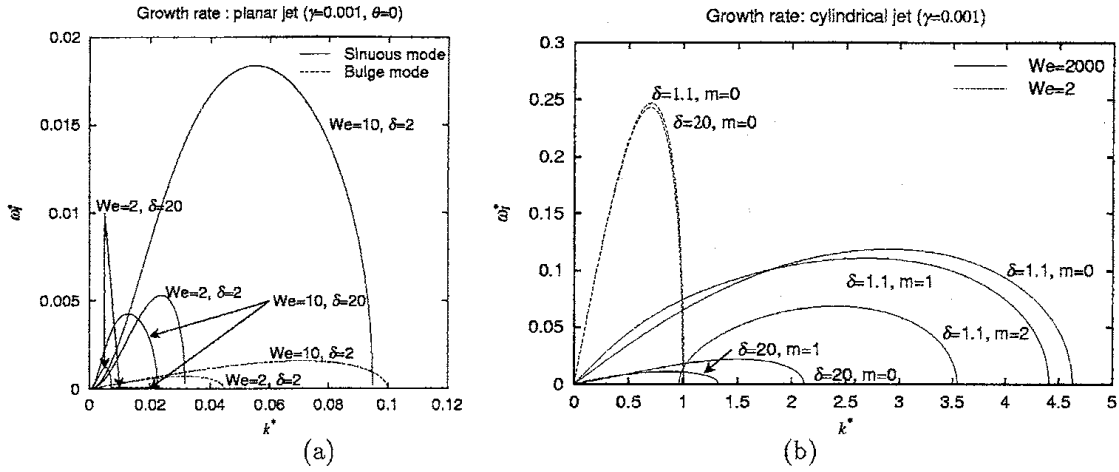


図 2: Temporal growth rates obtained by the exact linear analysis; (a) planar jet, (b) cylindrical jet.

#### 4.1 平面ジェット

図 1(a) でジェット本体の厚みを  $b = h_+ - h_-$ , 中心面を  $\eta = (h_+ + h_-)/2$  とし, 外部流体の厚み及び中心面をそれぞれ  $b_{\pm} = H \mp h_{\pm}$ ,  $\eta_{\pm} = (\pm H + h_{\pm})/2$  で表す. 長波近似に従い [4] 速度及び圧力が以下のように  $(z - \eta)$  及び  $(z - \eta_{\pm})$  の厚みに関する量で冪級数展開できるとする:

ジェット本体部;

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= u_0 + (z - \eta)u_1 + (z - \eta)^2 u_2 + \cdots, \\ v(x, z, t) &= v_0 + (z - \eta)v_1 + (z - \eta)^2 v_2 + \cdots, \\ p(x, z, t) &= p_0 + (z - \eta)p_1 + (z - \eta)^2 p_2 + \cdots, \end{aligned} \quad (25)$$

周囲流体部;

$$\begin{aligned} u_{\pm}(x, z, t) &= u_{0\pm} + (z - \eta_{\pm})u_{1\pm} + (z - \eta_{\pm})^2 u_{2\pm} + \cdots, \\ v_{\pm}(x, z, t) &= v_{0\pm} + (z - \eta_{\pm})v_{1\pm} + (z - \eta_{\pm})^2 v_{2\pm} + \cdots, \\ p_{\pm}(x, z, t) &= p_{0\pm} + (z - \eta_{\pm})p_{1\pm} + (z - \eta_{\pm})^2 p_{2\pm} + \cdots, \end{aligned} \quad (26)$$

上の展開を §1 に示した基礎方程式及び境界条件に用いて各冪で整理し最低次の近似に注目する.

まず, (25) を (1), (5) 及び (6) に用いて

$$\partial \eta / \partial t + u_0 \partial \eta / \partial x - v_0 = 0, \quad (27)$$

$$\partial b / \partial t + u_0 \partial b / \partial x + b \partial u_0 / \partial x = 0, \quad (28)$$

さらに, (4) より

$$\partial u_0 / \partial t + u_0 \partial u_0 / \partial x = -(1/\rho_L)(\partial p_0 / \partial x - p_1 \partial \eta / \partial x), \quad (29)$$

$$\partial v_0 / \partial t + u_0 \partial v_0 / \partial x = -(1/\rho_L)p_1, \quad (30)$$

を得る. ここで,  $f_{\pm} = [1 + (\partial(\eta \pm b/2)/\partial x)^2]^{-3/2}$  を用いて

$$p_0 = (p_{0+} + p_{0-})/2 - \sigma \left[ f_+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\eta + b/2) - f_- \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\eta - b/2) \right] + (1/4)[(H - b/2 - \eta)p_{1+} - (H - b/2 + \eta)p_{1-}], \quad (31)$$

$$bp_1 = (p_{0+} - p_{0-}) + (\eta - H + b/2)(p_{1+}/2) - (\eta + H - b/2)(p_{1-}/2) - \sigma \left[ f_+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\eta + b/2) + f_- \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\eta - b/2) \right]. \quad (32)$$

一方, 周囲流体部に対しては, (26) を (3), (5), (6), (4), (7) に用いることにより

$$\partial \eta_{\pm} / \partial t + u_{0\pm} \partial \eta_{\pm} / \partial x - v_{0\pm} = 0, \quad (33)$$

$$\partial b_{\pm} / \partial t + u_{0\pm} \partial b_{\pm} / \partial x + b_{\pm} \partial u_{0\pm} / \partial x = 0, \quad (34)$$

$$\partial u_{0\pm} / \partial t + u_{0\pm} \partial u_{0\pm} / \partial x = -(1/\rho_G)(\partial p_{0\pm} / \partial x - p_{1\pm} \partial \eta_{\pm} / \partial x), \quad (35)$$

$$\partial v_{0\pm} / \partial t + u_{0\pm} \partial v_{0\pm} / \partial x = -(1/\rho_G)p_{1\pm}. \quad (36)$$

かくして, 問題は (27) から (30) と (33) から (36) までの 12 個の方程式を (31) と (32) を用いて解くことに帰着される.

## 4.2 円柱ジェット

図 1(b) でジェット外部流の厚みを  $b = H - h$ , 中心面を  $R = (H + h)/2$  とする. このとき, 長波近似では液柱部に対して [8]

$$w(r, z, t) = w_0 + r^2 w_1 + \dots, \quad p(r, z, t) = p_0 + r^2 p_1 + \dots, \quad (37)$$

のように  $r^2$  の幂で展開するが, 周囲流体に対しては

$$\begin{aligned} u_G(r, z, t) &= u_{G0} + (r - R)u_{G1} + (r - R)^2 u_{G2} + \dots, \\ w_G(r, z, t) &= w_{G0} + (r - R)w_{G1} + (r - R)^2 w_{G2} + \dots, \\ p_G(r, z, t) &= p_{G0} + (r - R)p_{G1} + (r - R)^2 p_{G2} + \dots, \end{aligned} \quad (38)$$

のように  $(r - R)$  の幂で展開する [7]. これらの展開を基礎方程式及び境界条件に用いて, 各幂で整理することにより平面ジェットの場合と同様比較的簡単な非線形方程式に帰着される. まず, 液柱部に対しては (37) を (9) に用いて

$$u = -(r/2)\partial w_0 / \partial z - (r^2/4)\partial w_2 / \partial z + \dots, \quad (39)$$

さらに, (10) から

$$\partial w_0 / \partial t + w_0 \partial w_0 / \partial z = -(1/\rho_L)(\partial p_0 / \partial z). \quad (40)$$

また, (13) から

$$\partial h / \partial t + w_0 \partial h / \partial z = -(h/2)(\partial w_0 / \partial z), \quad (41)$$

を得る. 一方, 周囲流体部に対しては (11), (13), (14) より

$$\partial R / \partial t + w_{G0} \partial R / \partial z - u_{G0} = 0, \quad (42)$$

$$\partial(Rb) / \partial t + \partial(Rbw_{G0}) / \partial z = 0. \quad (43)$$



また, (12) から

$$\rho_G(\partial w_{G0}/\partial t + w_{G0}\partial w_{G0}/\partial z) = -\partial p_{G0}/\partial z + p_{G1}\partial R/\partial z, \quad (44)$$

$$\rho_G(\partial u_{G0}/\partial t + w_{G0}\partial u_{G0}/\partial z) = -p_{G1}, \quad (45)$$

を得る. このとき,  $h^2 \ll |h - R|$  を仮定すれば液柱部と周囲流体部の圧力は (15) を通して

$$p_0 - [p_{G0} + (h - R)p_{G1}] = \sigma \left[ \left( 1 + (\partial h/\partial z)^2 \right) / h - \partial^2 h/\partial z^2 \right] \cdot [1 + (\partial h/\partial z)^2]^{-3/2}, \quad (46)$$

の関係にある. かくして問題は,  $h = 2R - H$ ,  $b = H - h$  の関係を考慮して, (40) から (46) を  $h, w_0, w_{G0}, u_{G0}, p, p_{G0}, p_{G1}$  について解くことに帰着される.

## 5 長波近似の有効性

前節で用いた長波近似の有効性をみるため得られた発展方程式の線形増幅率と §3 の厳密な線形増幅率との比較を行う.

### 5.1 平面ジェット

平衡状態での主流の速度を  $U$ , ジェットの厚みを  $b_0$ , 圧力を  $\bar{p}$  として, 以下のような微小攪乱の伝播を考える:

$$(u_0, v_0, \eta, \tilde{b}, u_{0\pm}, v_{0\pm}, p_{0\pm}, p_{1\pm}) = (U + \tilde{u}_0, \tilde{v}_0, \tilde{\eta}, b_0 + \tilde{b}, \tilde{u}_{0\pm}, \tilde{v}_{0\pm}, \bar{p} + \tilde{p}_{0\pm}, \tilde{p}_{1\pm}), \quad (47)$$

ここで,

$$(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0, \tilde{\eta}, \tilde{b}, \tilde{u}_{0\pm}, \tilde{v}_{0\pm}, \tilde{p}_{0\pm}, \tilde{p}_{1\pm}) = (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0, \tilde{\eta}, \tilde{b}, \tilde{u}_{0\pm}, \tilde{v}_{0\pm}, \tilde{p}_{0\pm}, \tilde{p}_{1\pm}) \exp[i(kx - \omega t)],$$

(47) を (27) から (36) に用いて, 微小量の 2 乗以上の項を無視することにより, 最終的には以下のような線形分散関係を得る:

$$(\omega^* - k^*)^2 + [4 + (\delta - 1)^2 k^{*2}] \gamma \omega^{*2} [4(\delta - 1)k^{*2}]^{-1} = k^{*2}/We \quad (\text{sinuous mode}), \quad (48)$$

$$(\omega^* - k^*)^2 + [4 + (\delta - 1)^2 k^{*2}] \gamma \omega^{*2} [4(\delta - 1)]^{-1} = k^{*4}/We \quad (\text{bulge mode}). \quad (49)$$

ただし, 平衡状態でのシート半厚み  $b_0/2$ , 主流速度  $U$ , そして時間  $b_0/2U$  を代表量とし, 無次元波数及び角周波数  $k^*$ ,  $\omega^*$  を用い,  $\gamma = \rho_G/\rho_L$ ,  $\delta = 2H/b_0$ ,  $We = \rho_L U^2 b_0/2\sigma$  の無次元パラメータが導入されている.

図 3(a) は  $k^*$  に対する  $\omega_I^*$  について (19), (20) の厳密解と (48), (49) による長波近似の比較を示す.  $k \ll 1$  の長波領域では両者とも良く一致している. しかし, 増幅領域や最大増幅率に関しては, 対称, 反対称両モードとも  $\delta = 25$  (外部流厚みがシート厚みの 25 倍) 程度まで厳密解と比較的良好一致を示すがことがわかる. しかし,  $\delta$  がそれ以上になると厳密解とのずれは急激に大きくなり長波近似はもはや有効でなくなる.

### 5.2 円柱ジェット

平衡状態が  $h = h_0$ ,  $p_0 = \bar{p}$ ,  $p_{G0} = \bar{p}_G$ ,  $p_{G1} = 0$  で表されるとき,  $\bar{p} - \bar{p}_G = \sigma/h_0$  となることに注意して, 以下の攪乱を考える:

$$(w_0, h, u_{G0}, w_{G0}, p_0, p_{G0}, p_{G1}) = (U + \tilde{w}_0, h_0 + \tilde{h}, \tilde{u}_{G0}, \tilde{w}_{G0}, \bar{p} + \tilde{p}_0, \bar{p} - \sigma/h_0 + \tilde{p}_{G0}, \tilde{p}_{G1}) \quad (50)$$

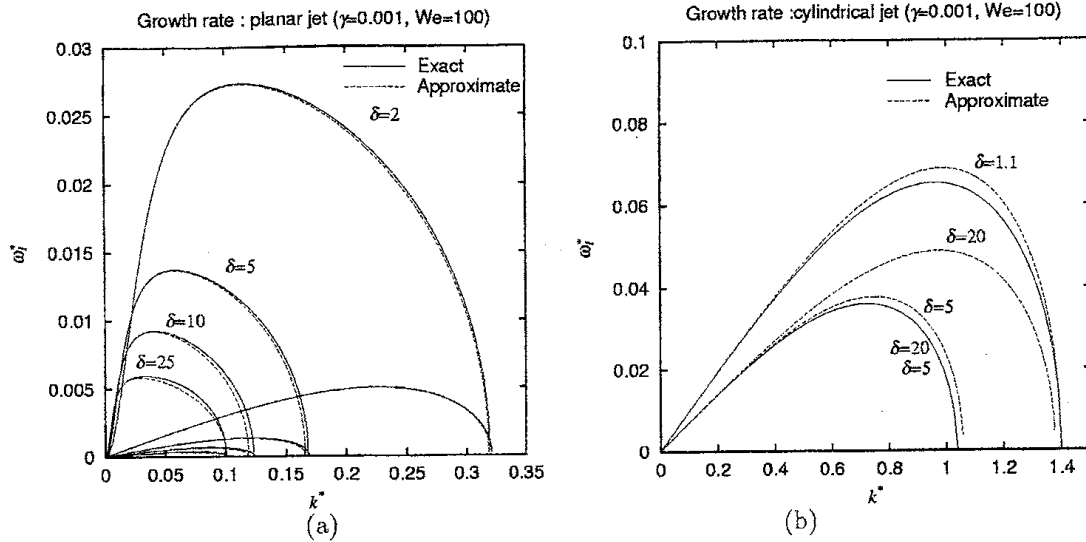


図 3: Comparison of the temporal growth rates between exact analysis and membrane approximations; (a) planar jet, (b) cylindrical jet.

ここで,

$$(\tilde{w}_0, \tilde{h}, \tilde{u}_{G0}, \tilde{w}_{G0}, \tilde{p}_0, \tilde{p}_{G0}, \tilde{p}_{G1}) = (\bar{w}_0, \bar{h}, \bar{u}_{G0}, \bar{w}_{G0}, \bar{p}_0, \bar{p}_{G0}, \bar{p}_{G1}) \exp[i(kz - \omega t)].$$

(50) を (40) から (46) 用いて, 微小量の 2 乗以上の項を無視して以下の線形分散関係を得る:

$$[1 + \gamma(\frac{1}{\delta^2 - 1} + \frac{\delta^2 - 1}{8}k^2)]\omega^{*2} - 2k^*\omega^* + (1 + \frac{1 - k^2}{2We})k^{*2} = 0. \quad (51)$$

ここで, 平衡状態でのシート半径  $h_0$ , 主流速度  $U$ , 時間  $b_0/2U$  を代表量とし, 無次元波数及び角周波数  $k^* = kh_0$ ,  $\omega^* = h_0\omega/U$  と無次元パラメータ  $\gamma = \rho_G/\rho_L$ ,  $\delta = H/h_0$ ,  $We = \rho_L h_0 U^2/\sigma$  が用いられている.

図 3(b) は増幅率に関して厳密解 (24) と長波近似 (51) との比較を示している. 図より長波領域  $k \ll 1$  では厳密解と近似は常に良く一致していることがわかる. しかし, 増幅波数領域や最大増幅率に関して  $\delta$  が 5 程度まで比較的一致するが, それ以上  $\delta$  が大きくなると厳密解から次第にずれていく. そして,  $\delta = 20$  では近似は大きくずれ, 外部流に対してもはや長波近似が成り立っていないことがわかる. この結果, 平面ジェットと比較して  $\delta$  の有効領域がかなり小さくなるといえる.

## 6 結論

前節までに得た結果をまとめる.

平面ジェットでは外部流体により長波攪乱に対して不安定になり, 外部流に対するジェットの相対速度が大きくなる ( $We$  が増大) につれて, その増幅波数領域と最大増幅率は増大する. そのとき, 固体壁が界面に近づくほどその増幅率や不安定波数領域が増加し, より不安定化される.

一方, 円柱ジェットの場合, 外部流に対するジェットの相対速度が小さい ( $We$  が小さい) 場合, 不安定は主に表面張力により引き起こされ,  $k^* < 1$  の領域で長波攪乱は不安定化される. そのため外部流の影響はほとんど現れず, 固体壁の影響はない. しかし, 相対速度が大きくなる ( $We$  が増加) につれて, 表面張力のみならず外部流による影響のため不安定波数領域は増大し, 固体壁がジェットに近づくほどその増幅率や増幅波数領域は増加する.

外部流体を伴う平面及び円柱ジェットに対して長波近似を用いることにより, 比較的簡単な発展方程式を導出した. 近似の有効性を確かめるために, 線形増幅率と増幅波数領域に関して厳密解との比較をおこなった. その結果, 当然のことながら外部流領域が薄ければ良い近似を与えることが示された. しかし, 平面ジェットは比較的外部流領域が厚くても (ジェット厚みの 25 倍程度) かなり良い近似を与えるのに対して, 円柱ジェットの場合外部領域は高々円柱半径の 5 倍程度までしか有効でないことがわかった.

今後の課題として, 長波近似により得られた非線形方程式を実際に数値的に解くことが残されている. 平面ジェットの場合 §4.1 で示したように, (27) から (30) と (33) から (36) までの 12 個の発展方程式を (31) と (32) を用いて解くことになるが, 実際の計算では,  $u_0, v_0, b, \eta, u_{0\pm}, v_{0\pm}$  の発展方程式と  $p_{0\pm}, p_{1\pm}$  の  $x$  に関する連立 2 階常微分方程式を同時に解く必要があり計算は見掛けほど簡単ではない. 円柱ジェットに関しても同様に, §4.2 で示したように (40) から (46) を  $h, w_0, w_{G0}, u_{G0}, p, p_{G0}, p_{G1}$  について解くのであるが, 実際の計算では,  $w_0, h, w_{G0}, u_{G0}$  の発展方程式と  $p_{G0}, p_{G1}$  の  $z$  に関する 2 階の連立常微分方程式を同時に解くことになる.

本稿を準備するにあたり, 阪大基礎工大学院生 前田倫子氏にお世話になった. ここにお礼申し上げる.

## 参考文献

- [1] S.P.Lin *Breakup of Liquid Sheets and Jets* (Cambridge Univ.Press, 2003), see also references therein.
- [2] C.J.Clark and N.Dombrowski : Proc. R. Soc. Lond. A **329**(1972), 467.
- [3] S.A.Jazayeri and X.Li : J. Fluid Mech. bf 406 (2000), 281.
- [4] C.Mehring and W.A.Sirignano: J. Fluid Mech. **388**(1999),69.
- [5] C.Mehring and W.A.Sirignano: Phys. Fluids **12**(2000),1417.
- [6] T.Yoshinaga and K.Kotani: J. Phys. Soc. Jpn **70**(2001), 372.
- [7] T.Yoshinaga, K.Kan and K.Mitomi: *Trends in Applications of Mathematics to Mechanics* eds. Y.Wang and K.Hutter (Shaker Verlag, 2005), 627.
- [8] J.Eggers: Rev. Mod. Phys. **69** (1997), 865.
- [9] M.Sano and M.Funakoshi : Lect. RIMS, Kyoto Univ. **1311** (2003), 85 [in Japanese].